

Matematikus szakirány

Valószínűségszámítás1

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	matematikus	mm1c1vs3m mm1c2vs3m	3

Tantárgyfelelős

- [Móri Tamás](#)
[Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Véges matematika1E (mm1c1vm1)
		Erős: Analízis2E (mm1c1an2) vagy Az analízis megalapozásaE (mm1c1ap2)
Előadás		
		Gyenge: a gyakorlat

- Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- [Móri Tamás](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

A tárgy a bevezető analízis (kis ordó, nagy ordó, \sim (aszimptotikusan egyenlő) relációk; végtelen sorok, műveletek abszolút konvergens sorokkal, csoportosíthatóság, átrendezhetőség, összegzés sorrendjének felcserélhetősége; sorok Cauchy-szorzata; hatványsorok, generátorfüggvények, konvergenciahalmazuk, differenciálhatóság

tagonként, $\exp(x)$, $\log(1+x)$ sorfejtése; Riemann-integrál, improprius Riemann-integrál, Stirling-formula) és a véges matematika anyag ismeretét követeli.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a diszkrét valószínűségszámítás alapvető fogalmainak és tételeinek megismertetése, nem építve mértékelméleti előismeretekre.

Irodalom

- **W. Feller:** *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- **Bognár Jánosné et al:** *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény*. Typotex kiadó, 2001.

Tematika

Valószínűségi mező. Feltételes valószínűség. Függetlenség. Valószínűségi változó, eloszlása, várható értéke, szórása. Együttes eloszlás, peremeloszlások. Kovariancia, korreláció. Egyszerű szimmetrikus bolyongás. Tükrözési elv és alkalmazásai. A bolyongással kapcsolatos különféle véletlen mennyiségek eloszlása. Arcus sinus törvény. Markov-, Csebisev-, Chernoff-egyenlőtlenség. Borel-Cantelli lemma. A nagy számok gyenge és erős törvényei. Lokális Moivre-Laplace tétel. Globális Moivre-Laplace tétel és következményei a bolyongással kapcsolatos mennyiségekre. Az iterált logaritmus-tétel. Diszkrét eloszlások konvergenciája. Poisson-approximáció. Generátorfüggvény és tulajdonságai. Folytonossági tétel. Korlátlanul osztható eloszlások. Elágazó folyamatok. Eloszlás- és sűrűségfüggvény. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások.

Valószínűségszámítás2

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
3 + 2	3 + 2	kollokvium + gyak. jegy	matematikus	mm1c1vs5m mm1c2vs5m	5

Tantárgyfelelős

- [Michaletzky György](#)
[Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

<u>Erős</u>	<u>Gyenge</u>	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Valószínűségszámítás1E-m (mm1c1vs3m) vagy Valószínűségszámítás1E-a (mm1c1vs3a)
		Erős: Analízis4E-m (mm1c1an4m) vagy Analízis4E-a (mm1c1an4a)
Előadás		
		Gyenge: a gyakorlat

Megjegyzések

- Az egyetemi órák
- Konzultáció
- Számonkérés

- A matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók választhatnak, hogy ezt a tárgyat, vagy az mm1c1vs5a és mm1c2vs5a kódú, 2+2 óraszámú tárgyat hallgatják.
- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A [tematikát](#) kidolgozta:

- [Michaletzky György, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék, Matematikai Intézet.](#)

Szükséges előismeretek

- Bevezető valószínűségszámítás fogalmai.
- Speciális halmazrendszerek és halmazfüggvények (algebra, szigmaalgebra, mérték). A Lebesgue mérték. Caratheodory-féle kiterjesztési tétel. A Borel-halmazok jellemzése. A mérhető leképezés fogalma, alaptulajdonságok. Lépcsősfüggvények, integrál. Mérhető függvények integrálja. Az integrál jellemzése és alaptulajdonságai. A Lebesgue-Stieltjes-integrál. A Beppo-Levi tétel, Fatou-lemma, egyéb konvergenciatételek. Az L^p terek értelmezése, Hölder-, Jensen-, Cauchy és Minkowski-egyenlőtlenség. Az L^p -terekre vonatkozó alapvető állítások. A Riemann-integrálhatóság és Lebesgue-integrálhatóság kapcsolata. A szorzatmérték fogalma, Fubini-tétel. Abszolút folytonosság. A Radon-Nikodym-tétel. Előjeles mértékek.
- Topológikus terek, nyílt, zárt halmazok. Metrikus terek.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az axiomatikus valószínűségszámítás elemeinek, és ezek egyes alkalmazásainak bemutatása.

Irodalom

- **J. Mogyoródi, Á. Somogyi:** *Valószínűségszámítás*. Egyetemi Jegyzet, 1989.
- **L. Galambos:** *Advanced probability theory*. Marcel Dekker, New York, 1995.

Tematika

- A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiómarendszere. Valószínűségi változók eloszlása, eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye. (Abszolút folytonos és diszkrét eloszlású valószínűségi változók.) A sűrűségfüggvény transzformációja diffeomorfizmus esetén.
- Események, eseményrendszerek, valószínűségi változók függetlensége. A generált szigma-algebra függetlensége. Kolmogorov-féle 0-1 törvény.
- Valószínűségi változók konvergenciájának alaptípusai. Sztochasztikus, 1 valószínűségű, L^p -beli konvergencia. Kapcsolat az egyes konvergenciafajták között. Egyenletes integrálhatóság. De la Vallée Poussin tétele.
- Lévy egyenlőtlenség. Független valószínűségi változók összege sztochasztikus konvergenciájának és 1 valószínűségi konvergenciájának ekvivalenciája. Nagy számok gyenge törvényei. A Feller-féle gyenge törvény.
- Valószínűségeloszlások gyenge konvergenciája. Feszesség, relatív kompaktság. Prohorov tétele. (Az egyik irány csak véges dimenziós Euklidészi tér esetén. [Az eloszlásbeli konvergencia jellemzése az eloszlásfüggvény viselkedésével. Helly-Brey-féle kiválasztási tétel.]

- Karakterisztikus függvény. Inverziós formula. Dobb-egyenlőtlenség. Folytonossági tétel. Centrális határeloszlástétel bizonyítása karakterisztikus függvények segítségével. Lindeberg-Feller-féle határeloszlástétel. A konvergenciagyorsaságról. (Berry-Esséen-tétel.)
- A feltételes várható érték általános fogalma. Alaptulajdonságok. Kiszámítása. Feltételes sűrűségfüggvény. A feltételes eloszlás reguláris változata.
- Martingálok, maximál-egyenlőtlenségek. Martingál-konvergencia-tétel. Példa arra, hogy ennek feltétele nem szükséges az 1 valószínűségi konvergenciához.
- A nagy számok erős törvényei. (Bizonyítás a Kronecker-lemma és martingálkonvergencia segítségével.) Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye.
- Független tagú végtelen sorok konvergenciája. Kolmogorov-féle három sor tétel.
- Martingálok L^1 konvergenciája. Reguláris martingálok.

Matematikai statisztika

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	matematikus	mm1c1st6m mm1c2st6m	6

Tantárgyfelelős

- [Móri](#) [Tamás](#)
[Valószínűségelméleti](#) és [Statisztika](#) [Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
		Erős: Valószínűségszámítás2E-m (mm1c1vs5m) vagy Valószínűségszámítás2E-a (mm1c1vs5a)

Előadás	Gyenge: a gyakorlat
----------------	------------------------

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- [Móri Tamás](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- **Lineáris algebrából/Funkcionálanalízisből:** szimmetrikus (és pozitív szemidefinit) mátrixok spektrálfelbontása (diagonális alakja). Valós ortonormált mátrixok, projekciók (minden csak véges dimenzióban). Kvadratikus alakok.
- Esetleg Moore-Penrose féle pszeudo inverz.
- **Mértékelméletről:** a mértékkiterjesztési tétel, Radon-Nikodym derivált és tulajdonságai, Fubini tétele, helyettesítéses integrálás.
- **Valószínűségszámításból:** az alapvető konvergenciafajták és -tételek (nagy számok törvénye, centrális határeloszlás-tétel), Cramér-Szluckij lemma, karakterisztikus függvény.
- Feltételes várható érték és valószínűség általános fogalma. Feltételes eloszlás (reguláris verzió), feltételes sűrűségfüggvény.
- Sűrűségfüggvény transzformációs formula. Kovarianciamátrix, (kereszt)kovariancia többdimenzióban is.
- Egydimenziós normális eloszlás, gamma-eloszlás, béta-eloszlás, konvolúciók.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a matematikai statisztika alapfogalmainak és néhány alapvető módszerének az ismertetése.

Irodalom

- **Mogyoródi – Michaletzky (Szerk.):** *Matematikai statisztika*. Egyetemi jegyzet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.
- **A. A. Borovkov:** *Matematikai statisztika*. Typotex Kiadó, 1999.
- **Bolla, Krámlí:** *Statisztikai következtetések elmélete*. Typotex Kiadó, 2005.
- **Móri, Szeidl, Zempléni:** *Matematikai statisztika példatár*. ELTE Eötvös Kiadó, 1997.

Tematika

Statisztikai mező. Tapasztalati eloszlás, Glivenko-Cantelli tétel. Elégségesség. Teljesség. Fisher-információ. Pontbecslések. Torzítatlanság, megengedhetőség, minimaxitás, hatásosság, konzisztencia. Blackwellizálás. Információs határ. Tapasztalati becslések, momentum-módszer, maximum-likelihood becslés. Bayes-

becslés. Hipotézisvizsgálat, próbák. Neyman-Pearson lemma. Klasszikus paraméteres próbák. c_2 -próbák. Klasszikus nem-paraméteres próbák. Többdimenziós normális eloszlás, a paraméterek becslése. Becslés és hipotézisvizsgálat lineáris modellben. Konfidenciahalmazok és -intervallumok.

Alkalmazott matematikus szakirány

Valószínűségszámítás1

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	alk. mat.	mm1c1vs3a mm1c2vs3a	3

Tantárgyfelelős

- [Zempléni András](#)
[Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Véges matematika1E (mm1c1vm1)
		Erős: Analízis2E (mm1c1an2) vagy Az analízis megalapozásaE (mm1c1ap2)
Előadás		
		Gyenge: a gyakorlat

Megjegyzések

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A **tematikát** kidolgozta:

- [Zempléni András](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- **Algebrából:** Komplex számok. Polinomok. Mátrixok. Lineáris egyenletrendszer. Lineáris leképezés és mátrixa. Csoport. Permutációk.
- **Véges matematikából:** Leszámlálási alapfeladatok. Szitaformula. Binomiális együtthetők.
- **Analízisből:** Primitív függvény fogalma, primitívfüggvény-keresési módszerek. A Riemann-integrál(hatóság) fogalma, integrálhatósági feltételek, az integrál elemi tulajdonságai, az integrál kiszámítása. Stirling formula. A végtelen sorokkal kapcsolatos alapfogalmak és a legegyszerűbb konvergenciakritériumok. Sorok átrendezése és szorzata. Taylor-formula.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a véletlen jelenségek matematikai modelljeinek és azok gyakorlati alkalmazásainak minél szélesebb körű megismerése.

Irodalom

- **Baróti, Bognárné, Fejes Tóth, Mogyoródi:** *Valószínűségszámítás*. ELTE TTK jegyzet, 1978.
- **W. Feller:** *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- **Bognár Jánosné et al:** *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény*. Typotex kiadó, 2001.
- **Rényi A.:** *Valószínűségszámítás*. (Egyetemi tankönyv.) Tankönyvkiadó, Bp., 1966, 1968, 1984 (I. kiadás 1954).

Tematika

- A valószínűség, elemi tulajdonságai. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Valószínűségek kombinatorikai kiszámítása. Geometriai valószínűségi mezők.
- Feltételes valószínűség, tulajdonságai, kiszámítása. Bayes-tétel. Teljes valószínűség tétele. Események függetlensége. Feltételes várható érték pozitív valószínűségű eseményre. Teljes várható érték tétel. Előrejelzések.
- Véletlen bolyongás, tönkremenési valószínűségek.
- A valószínűségi (vektor) változó. Eloszlás- és sűrűségfüggvény. Független valószínűségi változók. Független valószínűségi változók összegének eloszlása. Nevezetes diszkrét és abszolút folytonos eloszlások.
- Generátorfüggvény.
- A várható érték és a szórás, tulajdonságai, kiszámítása, nevezetes egyenlőtlenségek. Medián, momentumok. Kovariancia és korrelációs együttható.

- Nagy számok gyenge és erős törvénye. Centrális határeloszlástétel (bizonyítás nélkül).

Valószínűségszámítás2

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	alk. mat.	mm1c1vs5a mm1c2vs5a	5

Tantárgyfelelős

- [Arató Miklós](#)
[Valószínűségelméleti](#) és [Statisztika](#) Tanszék
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Valószínűségszámítás1E-m (mm1c1vs3m) vagy Valószínűségszámítás1E-a (mm1c1vs3a)
		Erős: Analízis4E-m (mm1c1an4m) vagy Analízis4E-a (mm1c1an4a)
Előadás		
		Gyenge: a gyakorlat

Megjegyzések

- A matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók választhatnak, hogy ezt a tárgyat, vagy az mm1c1vs5m és mm1c2vs5m kódú, 3+2 óraszámú tárgyat hallgatják.
- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A [tematikát](#) kidolgozta:

- [Arató Miklós](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- Bevezető valószínűségszámítás fogalmai. Speciális halmazrendszerek és halmazfüggvények (algebra, szigmaalgebra, mérték). A Lebesgue mérték. Caratheodory-féle kiterjesztési tétel. A Borel-halmazok jellemzése. A mérhető leképezés fogalma, alaptulajdonságok. Lépcsősfüggvények, integrál. Mérhető függvények integrálja. Az integrál jellemzése és alaptulajdonságai. A Lebesgue-Stieltjes-integrál. A Beppo-Levi tétel, Fatou-lemma, egyéb konvergenciatételek. Az L^p terek értelmezése, Hölder-, Jensen-, Cauchy és Minkowski-egyenlőtlenség. Az L^p -terekre vonatkozó alapvető állítások. A Riemann-integrálhatóság és Lebesgue-integrálhatóság kapcsolata. A szorzatmérték fogalma, Fubini-tétel. Abszolút folytonosság. A Radon-Nikodym-tétel. Előjeles mértékek.
- Topológikus terek, nyílt, zárt halmazok. Metrikus terek.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az axiomatikus valószínűségszámítás elemeinek, és ezek egyes alkalmazásainak bemutatása.

Irodalom

- **Rényi Alfréd:** *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- **Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András, Rényi Alfréd, Szász Domokos:** *Valószínűségszámítás, feladatgyűjtemény*. Typotex, 2002.
- **Mogyoródi József, Somogyi Árpád:** *Valószínűségszámítás*. Egyetemi jegyzet, 1989.
- **Móri Tamás:** *Diszkrét paraméterű martingálok*. Egyetemi jegyzet, ELTE, 1999.

Tematika

- A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiómarendszere. Valószínűségi változók eloszlása, eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye. A sűrűségfüggvény transzformációja diffeomorfizmus esetén.
- Események, eseményrendszerek, valószínűségi változók függetlensége.
- Valószínűségi változók konvergenciájának alaptípusai. Sztochasztikus, 1 valószínűségű, L^p -beli konvergencia. Kapcsolat az egyes konvergenciafajták között. Egyenletes integrálhatóság.
- Valószínűségeloszlások gyenge konvergenciája. Feszesség, relatív kompaktság. Prohorov tétele.
- Karakterisztikus függvény. Inverziós formula. Folytonossági tétel. Konvergencia Poisson eloszláshoz.
- Centrális határeloszlástétel bizonyítása karakterisztikus függvények segítségével. Berry-Esséen-tétel.

- A feltételes várható érték általános fogalma. Aaptulajdonságok. Kiszámítása. Feltételes sűrűségfüggvény. A feltételes eloszlás reguláris változata.
- Martingálok, megállási idők, maximál-egyenlőtlenségek. Martingál-konvergencia-tétel.
- Doob- és Crickeberg-felbontás.
- Lévy tétele. Kolmogorov-féle erős törvény.
- Független tagú végtelen sorok konvergenciája. Kolmogorov-féle három sor tétel.
- Poisson folyamat, elágazó folyamatok.

Matematikai statisztika

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	alk. mat.	mm1c1st6a mm1c2st6a	6

Tantárgyfelelős

- [Móri](#) [Tamás](#)
[Valószínűségelméleti](#) és [Statisztika](#) [Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
		Erős: Valószínűségszámítás2E-m (mm1c1vs5m) vagy Valószínűségszámítás2E-a (mm1c1vs5a)
		Előadás Gyenge: a gyakorlat

Megjegyzések

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A [tematikát](#) kidolgozta:

- [Móri Tamás](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- **Lineáris algebrából/Funkcionálanalízisből:** szimmetrikus (és pozitív szemidefinit) mátrixok spektrálfelbontása (diagonális alakja). Valós ortonormált mátrixok, projekciók (minden csak véges dimenzióban). Kvadratikus alakok.
- Esetleg Moore-Penrose féle pszeudo inverz.
- **Mértékelméletből:** a mértékkiterjesztési tétel, Radon-Nikodym derivált és tulajdonságai, Fubini tétele, helyettesítéses integrálás.
- **Valószínűségszámításból:** az alapvető konvergenciafajták és -tételek (nagy számok törvénye, centrális határeloszlás-tétel), Cramér-Szluckij lemma, karakterisztikus függvény.
- Feltételes várható érték és valószínűség általános fogalma. Feltételes eloszlás (reguláris verzió), feltételes sűrűségfüggvény.
- Sűrűségfüggvény transzformációs formula. Kovarianciamátrix, (kereszt)kovariancia többdimenzióban is.
- Egydimenziós normális eloszlás, gamma-eloszlás, béta-eloszlás, konvolúciók.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a matematikai statisztika alapfogalmainak és néhány alapvető módszerének az ismertetése.

Irodalom

- **Mogyoródi – Michaletzky (Szerk.):** *Matematikai statisztika*. Egyetemi jegyzet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.
- **A. A. Borovkov:** *Matematikai statisztika*. Typotex Kiadó, 1999.
- **Bolla – Krámlí:** *Statisztikai következtetések elmélete*. Typotex Kiadó, 2005.
- **Móri – Szeidl – Zempléni:** *Matematikai statisztika példatár*. ELTE Eötvös Kiadó, 1997.

Tematika

Statisztikai mező. Tapasztalati eloszlás, Glivenko-Cantelli tétel. Elégségesség. Teljesség. Fisher-információ. Pontbecslések. Torzítatlanság, megengedhetőség, minimaxitás, hatásosság, konzisztencia. Blackwellizálás. Információs határ. Tapasztalati becslések, momentum-módszer, maximum-likelihood becslés. Bayes-becslés. Hipotézisvizsgálat, próbák. Neyman-Pearson lemma. Klasszikus paraméteres próbák. c_2 -próbák. Klasszikus nem-paraméteres próbák. Többdimenziós normális eloszlás, a paraméterek becslése. Becslés és hipotézisvizsgálat lineáris modellben. Konfidenciahalmazok és -intervallumok.

Alkalmazott Modul: Valószínűségszámítási modellek

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
0 + 3	0 + 5	gyak. jegy	alk. mat.	mm1c2mv6a	6

Tantárgyfelelős

- [Zempléni András](#)
[Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Valószínűségszámítás2E-m (mm1c1vs5m) vagy Valószínűségszámítás2E-a (mm1c1vs5a)
		Gyenge: Matematikai statisztikaG-m (mm1c2st6m) vagy Matematikai statisztikaG-a (mm1c2st6a)

Megjegyzések

- Követelmény:** A gyakorlati jegy megszerzéséhez a félév végén egy zárthelyi dolgozatot kell írni, valamint fel kell dolgozni a félév elején egyeztetett témát, és erről 30-45 perces előadás formájában az órán be kell számolni.
- Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A [tematikát](#) kidolgozta:

- [Zempléni András](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

A valószínűség, elemi tulajdonságai. Feltételes valószínűség. Bayes-tétel. Teljes valószínűség tétele. Teljes várható érték tétel. Független valószínűségi változók. Nevezetes diszkrét és abszolút folytonos eloszlások. A várható érték és a szórás,

tulajdonságai, kiszámítása, nevezetes egyenlőtlenségek. Medián, momentumok. Kovariancia és korrelációs együttható. Nagy számok törvényei. Centrális határeloszlástétel.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a véletlen jelenségek modelljeinek és azok gyakorlati alkalmazásainak minél szélesebb körű megismerése.

Irodalom

- **Rudas T:** *Így olvassunk közvéleménykutatásokat.* Új Mandátum, Budapest, 1998.
- **Barabási-Albert, L.:** *Behálózva.* Magyar Könyvklub, Budapest, 2003.
- **Knuth, D.:** *A számítógép-programozás művészete II.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1994.
- További (részben angol nyelvű) szakirodalom az egyes témákhoz kapcsolódóan.

Tematika

- Fontos alkalmazott valószínűség-számítási és statisztikai modellek, módszerek tárgyalása nagyjából a hallgatók által tartott előadások/gyakorlatok formájában, melyekre nem kerül sor a kötelező előadások keretében.
- Így például: hálózatok/véletlen gráfok modelljei, extrém-érték elemzés, rekordok eloszlása, clusterezés, véletlenszám-generátorok, Markov-lánc Monte Carlo módszerek, szerencsejátékok matematikai modelljei, pszichometria, közvéleménykutatások, valószínűség-számítási, ill. statisztikai paradoxonok, szimulációk.
- Rangstatisztikák, statisztikai eredmények grafikus megjelenítése. Kísérlettervezés, alkalmazott szórásanalízis, ipari statisztika elemei stb.

Matematikai elemző szakirány Valószínűség-számítás

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	elemző	mm1c1vs3e mm1c2vs3e	3

Tantárgyfelelős

- Bognár Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet Jánosné

<u>Erős</u>	<u>Gyenge</u>	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Kalkulus2E (mm1c1ka2) vagy Analízis2E (mm1c1an2)
		Erős: Véges matematika1E (mm1c1vm1)
Előadás		
		Gyenge: a gyakorlat

Megjegyzések

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- Bognár Jánosné, [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- **Algebrából:** Komplex számok. Polinomok. Mátrixok. Lineáris egyenletrendszer. Lineáris leképezés és mátrixa. Csoport. Permutációk.
- **Véges matematikából:** Szitaformula. Binomiális együtthatók. Gráfok.
- **Analízisből illetve Kalkulusból:** Határérték. Differenciálás. Riemann-integrál. Végtelen sorok. Függvénysorozatok, hatványsorok, Taylor-sor.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a véletlen jelenségek matematikai modelljeinek és azok gyakorlati alkalmazásainak minél szélesebb körű megismerése.

Irodalom

- **Baróti-Bognárné-Fejes** Tóth-
Mogyoródi: *Valószínűségszámítás*. ELTE TTK jegyzet, 1978.
- **W. Feller:** *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- **Bognár Jánosné et al:** *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény*. Typotex kiadó, 2001.
- **Rényi A.:** *Valószínűségszámítás*. (Egyetemi tankönyv.) Tankönyvkiadó, Bp., 1966, 1968, 1984 (I. kiadás 1954).

Tematika

- A valószínűség, elemi tulajdonságai. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Valószínűségek kombinatorikai kiszámítása. Geometriai valószínűségi mezők.
- Feltételes valószínűség, tulajdonságai, kiszámítása. Bayes-tétel. Teljes valószínűség tétele. Események függetlensége.
- Véletlen bolyongás, tönkremenési valószínűségek.
- A valószínűségi (vektor) változó és eloszlása, együttes eloszlás. Eloszlás- és sűrűségfüggvény.
- Független valószínűségi változók. Független valószínűségi változók összegének eloszlása. Nevezetes diszkrét és abszolút folytonos eloszlások.
- A várható érték és a szórás, tulajdonságai, kiszámítása, nevezetes egyenlőtlenségek.
- Medián, momentumok. Kovariancia és korrelációs együttható.
- Nagy számok gyenge és erős törvénye.
- Centrális határeloszlástétel.
- Feltételes várható érték, előrejelzések.

Leíró és matematikai statisztika

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
3 + 2	3 + 3	kollokvium + gyak. jegy	elemző	mm1c1ls4e mm1c2ls4e	4

Tantárgyfelelős

- [Zempléni](#) [András](#)
[Valószínűségelméleti](#) és [Statisztika](#) [Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
Gyakorlat		Erős: Programozási alapismeretekE(im1c1pn2)
		Erős: Valószínűségszámítás1E-m(mm1c1vs3m) vagy Valószínűségszámítás1E-a(mm1c1vs3a) vagy

	ValószínűségyszámításE-t(mm1c1vs5t) vagy ValószínűségyszámításE-e(mm1c1vs3e)
	Erős: Algebra1E (mm1c1a1)
Előadás	<i>Gyenge:</i> <i>a gyakorlat</i>

Megjegyzések

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- [Zempléni András](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- **Algebrából:** Mátrixok, műveletek, oszlopvektorok lineáris függetlensége, rang. Lineáris leképezés és mátrixa, Diagonalizálás, sajátérték, karakterisztikus polinom.
- **Analízisből illetve Kalkulusból:** Logikai és halmazelméleti alapfogalmak, nevezetes egyenlőtlenségek, a valós számok, végtelen tizedestörtek . Számsorozat határértéke. Egyváltozós függvények határértéke és folytonossága. A hatványfogalom felépítése, elemi függvények.
- Egyváltozós függvények differenciálása, a monotonitás és a szélsőértékek vizsgálata,
- középpértéktételek; magasabb rendű deriváltak, konvexitás, inflexiós pont
- Primitív függvény fogalma, primitívfüggvénykeresési módszerek. A Riemann-integrál(hatóság) fogalma, integrálhatósági feltételek, az integrál elemi tulajdonságai, az integrál kiszámítása.
- Az improprius integrál fogalma, az improprius értelemben vett integrálhatóság feltételei, a
- végtelen sorokra vonatkozó integrálkritérium.
- Függvénysorozatok, függvénysorok, hatványsorok, egyenletes konvergencia, a limeszfüggvény (összegfüggvény) folytonossága, differenciálhatósága és integrálhatósága.
- Taylor formula, Taylor sor, konkrét függvények előállítása Taylor sor összegfüggvényeként.
- **Bevezetés az informatikából, programozási alapismeretekből:** Operációs rendszerek (Windows, Linux) legfontosabb jellemzői, grafikus és parancsmódú használatuk. Programozási nyelvek, egyszerű programok készítése.

- **Valószínűségyszámításból:** Valószínűségi mező. Véges valószínűségi mezők. Példák a kombinatorikus valószínűségi mező alkalmazására. A feltételes valószínűség. Függetlenség. Valószínűségi változók függvényeinek eloszlása.
- Várható érték, szórás. Korrelációs együttható. Nagy számok Bernoulli törvénye.
- A geometriai valószínűségi mező. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások. A centrális határeloszlás tétel.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célkitűzése az elemző szakos hallgatók számára szükséges szinten megismertetni a statisztika alapfogalmait, a matematikailag megalapozott adatelemzéshez szükséges ismeretek átadása, használatuk bemutatása gyakorlati példákon keresztül.

Irodalom

Kötelező:

- **Lukács Ottó:** *Matematikai statisztika*. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1999.

Ajánlott:

- **Korpás Attiláné (szerk.):** *Általános Statisztika I-II*. 1997.
- **Michaletzky György (szerk.):** *Matematikai statisztika programozó matematikus szakos hallgatóknak*. 1995.

Tematika

- Statisztika alapfogalmi: statisztikai minta, a minta jellemzői: viszonyszámok, középértékek (átlag, medián, módusz), kvantilisek, szóródási mérőszámok, kiszámításuk. Kiegészítő anyag: korrekciós képletek
- Idősorok alapfogalmi: periódus, trend. Idősorok mozgóátlagos simítása. Stacionárius idősorok.
- Statisztikai táblák elemzése: asszociációs együtthatók, korrelációs számítás. Peremeloszlás, feltételes eloszlás.
- Indexszámítás: Laspeyres és Paasche-féle indexek.
- Mintavétel alapfogalmi. Egyszerű véletlen minta, rétegzett mintavétel. Kiegészítő anyag: Horwitz-Thomson becslés.
- Statisztikai becslések, konfidenciaintervallumok. Becslési módszerek: maximum likelihood becslés, momentumbecslés. Becslések tulajdonságai: torzítatlanság, konzisztencia. Mérőszámok: átlagos négyzetes eltérés, standard hiba. Kiegészítő anyag: a sűrűségfüggvény becslése Parzen-Rosenblatt módszerével.
- A hipotézisvizsgálat alapfogalmi: első-, másodfajú hiba, erőfüggvény. A normális eloszlás középértékére vonatkozó próbák: u-próba, t-próba, egyes kétmintás változataik. Chi-négyzet próbák: illeszkedés-, függetlenség- és homogenitásvizsgálat. Kiegészítő anyag: nemparaméteres próbák (Wilcoxon, Kolmogorov-Szmirnov).

- Lineáris regresszió: a paraméterek legkisebb négyzetes becslése, a becslés tulajdonságai. Hipotézisvizsgálat.
- A tematikában kiegészítő anyagként megjelölt részek tárgyalására az előadáson nem mindig kerül sor. A kollokviumi számonkérésbe az évfolyam felkészültségétől függően kerülhetnek bele egyes az előadáson nem tárgyalt részek. A teljes tételjegyzék ennek megfelelően évente kissé módosulhat.

Idősorok és többdimenziós statisztika

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
2 + 2	2 + 3	kollokvium + gyak. jegy	elemző	mm1c1is5e mm1c2is5e	5

Tantárgyfelelős

- [Márkus](#) [László](#)
[Valószínűségelméleti](#) és [Statisztika](#) [Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)
- [Michaletzky](#) [György](#)
[Valószínűségelméleti](#) és [Statisztika](#) [Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
		Erős: Leíró és matematikai statisztikaE-e (mm1c1ls4e)
		Erős: Analízis3E-m (mm1c1an3m) vagy Analízis3E-a (mm1c1an3a) vagy Analízis3E-t (mm1c1an3t) vagy Kalkulus3E-e (mm1c1ka3e)

Előadás	Gyenge: a gyakorlat
----------------	------------------------

Megjegyzések

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A **tematikát** kidolgozta:

- [Márkus László](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

- **Valószínűségszámításból:** Várható érték, momentumok, szórásnégyzet, kovariancia és korreláció. Nevezetes eloszlások. Konvergenciatípusok. Nagy számok törvényei. Centrális határeloszlás tétel. Feltételes valószínűség és feltételes várható érték.
- **Leíró és matematikai statisztikából:** Statisztika alapfogalmai: középértékek, kvantilisok, szóródási mérőszámok. Idősorok alapfogalmai. korrelációs számítás. Mintavétel alapfogalmai. Statisztikai becslések, konfidenciaintervallumok. Hipotézisvizsgálat alapfogalmai, normális eloszlásra vonatkozó próbák, chinégyzet próbák. Lineáris regresszió.
- **Kalkulus3-ból:** Fourier sorok. A Fourier sorok alkalmazásai.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az idősorok alapvető fogalmainak, elemzésük legegyszerűbb módszereinek bemutatása, valamint a többdimenziós statisztika legegyszerűbb alapismereteinek elsajátíttatása a hallgatókkal. Az akkreditált tematikában szereplő tananyag keretein belül elsősorban az alapvető fogalmakat, tételeket, módszereket tárgyaljuk igen részletesen. Ezért a tárgy elsősorban az elemző szakirány igényeit tartja szem előtt.

Irodalom

Ajánlott:

- **Feller W.:** *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Műszaki Kiadó, 1978.
- **S. Karlin-H. Taylor:** *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, 1985.
- **Michelberger-Szeidl-Várlaki:** *Alkalmazott folyamatstatisztika és idősor analízis*. Typotex, 2001.
- **Brockwell, Davis:** *Introduction to time series and forecasting*. Springer. 1996.
- **Roazanov, Yu. A.:** *Probability Theory, Stochastic Processes and Mathematical Statistics*. 1997
- **C. R. Rao:** *linear statistical inference and its applications*. Wiley, 1965.

Tematika

- Néhány jól ismert speciális folyamatot (Poisson, Yule, Galton-Watson folyamatok) ismertetünk elsőként. A modelleírások mellett véletlen időpontokban bekövetkező események segítségével is származtatjuk ezeket, és meghatározzuk az ehhez tartozó eloszlásokat. A Galton-Watson folyamatok esetében tárgyaljuk a kihálási valószínűség meghatározásának módját. E folyamatok bemutatásán keresztül érintjük a Markov folyamatok elméletének alapfogalmait is.
- Stacionárius folyamatok, alapfogalmainak bevezetésével folytatjuk a tárgyat. A gyenge, erős valamint a k -adredű stacionaritás és az ergodicitás fogalmát és kapcsolataikat tisztázzuk. Az összefüggési struktúra leírására bevezetjük az autokovariancia, autokorreláció és parciális autokorreláció függvényeket ismertetjük tulajdonságaikat, és megemlítyük a dinamikus kopulákat, mint egy újabbban előtérbe került lehetőséget. Áttérve a frekvenciatartományra heurisztikus értelmezését adjuk a stacionárius idősor Fourier előállításának. Megadjuk a spektráelőállítást egzakt formában is, kimondjuk a Herglotz tételt, de nem bizonyítjuk.
- Ezek után definiáljuk az autoregressziós (AR(p)), a mozgóátlag (MA(q)), valamint általánosan az integrált autoregressziós mozgóátlag ARIMA(p,d,q) folyamatot. Feltételt adunk a stacionárius megoldás létezésére, kiszámítjuk fontos speciális esetekben a szórást az autokovariancia függvényt, valamint a spektrálsűrűség függvényt. Rámutatunk, hogy az invertálható ARIMA folyamatok lineáris folyamatok. Bevezetjük az ARCH folyamatokat mint az egyik legegyszerűbb nemlineáris folyamatot. Megvizsgáljuk az ARCH(1) folyamat stacionárius megoldása létezésének feltételét és a megoldás konstrukcióját, ha a megoldás szórása véges. Tovább lépve, általánosan, sztochasztikus rekurziós egyenletek esetén Ljapunov-exponenssel adjuk a stacionárius megoldás létezésének feltételét és kimondjuk a Kesten-Vervaat-Goldie tételt reguláris változású eloszlással bíró stacionárius eloszlás létezéséről. Ezek után térünk vissza az ARCH(1) folyamathoz és általánosan második momentum végességének feltételezése nélkül is megadjuk a stacionárius megoldás létezésének feltételét. Ismertetjük a GARCH folyamatokra vonatkozó eredményeket is. Ugyancsak tárgyaljuk ezt a témakört a bilineáris folyamatokra is. A további nemlineáris modellek közül megemlítyük a véletlen együtthatós AR, és a SETAR modelleket.
- Idősorok becsléelméletének részeként először a várható érték becslésével foglalkozunk. A legjobb lineáris becslés kiszámítása után elemezzük az átlag viselkedését a spektrálmérték tulajdonságai függvényében. Megmutatjuk, hogy ha a $\{0\}$ -ra koncentrált spektrálmérték pozitív, akkor az átlag még csak nem is konzisztens. Az autokorreláció függvény többféle becslését vizsgáljuk, és rámutatunk, hogy a torzítatlanság helyett fontosabb, hogy az elméletileg helyes pozitív definit tulajdonsággal rendelkezzen a becslés valamint, hogy a becslés szórása ne növekedjék a „lag”, a késleltetés növekedtével. Számítjuk a becslés torzítását, szórását, és határeloszlását. Bemutatjuk a periodogramot, mint a diszkrét spektrum becslését. A spektrálsűrűségfüggvény becslésére az ablakolás eljárását ismertetjük röviden.
- A többdimenziós normális eloszlást definiáljuk, megadjuk sűrűségfüggvényét majd rátérünk a várható érték és a szórás mátrix becsléseinek tulajdonságaira. A regresszió feladatával folytatjuk, megadjuk a legkisebb négyzetes becslést, kimondjuk a Gauss Markov tételt. A

regresszió „jóságát” jellemző R2 érték és F-próba tárgyalása után rátérünk a magyarázó változók beválasztásának, vagy redukálhatóságának kérdéskörére, definiáljuk a toleranciát és alkalmazzuk a parciális korrelációt. A regresszió bizonytalanságát mérjük a Mahalanobis távolsággal. Outlierek detektálására bevezetjük a Cook távolság fogalmát. A továbbiakban még röviden megemlítjük az egyszempontú szórásanalízis feladatát, valamint kontingenciatáblák elemzését.

A matematikai statisztika számítógépes módszerei

Óraszám ea/gy	Kredit ea/gy	Számonkérés	Szakirány	Tárgykód ea/gy	Ajánlott félév
0 + 2	0 + 2	gyak. jegy	elemző	mm1c2ms6e	6

Tantárgyfelelős

- [Michaletzky György](#)
[Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#)
[Matematikai Intézet](#)

Erős	Gyenge	előfeltételek
		Gyakorlat Erős: Idősorok és többdimenziós statisztikaE-e (mm1c1is5e)

Megjegyzések

- Követelmény:** A gyakorlati jegy megszerzéséhez zárthelyi dolgozatot kell írni, valamint számítógépes programot kell készíteni.
- Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- [Pröhle Tamás](#), [Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék](#), [Matematikai Intézet](#).

Szükséges előismeretek

A tárgy a statisztika elemeinek ismeretét követeli meg.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja a matematikai statisztika számítógépes módszereinek megismertetése.

Tematika

- A legfontosabb irodai (EXCEL) továbbá a nyitott kódú (R, Scilab, Octave stb) és a rendelkezésre álló licencces programok (SPSS, SAS, MATLAB stb.) statisztikai elemzésre alkalmas részeinek megismertetése.
- Programok elindítása, adatbeviteli módszerek, a programrészek lefuttatásának lehetőségei és az eredmények értelmezése, különös tekintettel a következő statisztikai területekre: leíró statisztikák, hipotézis vizsgálati eljárások, illeszkedés vizsgálat, függetlenség vizsgálat, szórás analízis, regresszió, spektrum vizsgálati eszközök, lineáris folyamat illesztés, főkomponens- és faktoranalízis, kanonikus korreláció, skálázás, osztályozás.
- Kiegészítő témakörök: nemlineáris folyamat modellek illesztése, diszkrét többdimenziós adatok modellezése, korrespondancia analízis, változó válogatás.